ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ, 27/9/2017, Α. Τόλιας

Θέμα 1. (4 μον.)
Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είτε να χαρακτηριστεί ως ΣΩΣΤΗ (οπότε να παρουσιάσετε την απόδειξη της) είτε να χαρακτηριστεί ως ΛΑΘΟΣ (οπότε να παρουσιάσετε αντιπαράδειγμα αποδεικνύοντας τις ιδιότητές που ισχυρίζεστε ότι έχει).

(Α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα τότε ισχύει $a_k \to 0$.

(Β) Αν ισχύει $a_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι συγκλίνουσα.

(Γ) Αν η συνάρτηση $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και φραγμένη τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(Δ) Αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(Ε) Αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz.

(ΣΤ) Αν η συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε είναι ολοκληρώσιμη.

(Ζ) Αν η συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η συνάρτηση $F : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη.

Θέμα 2. (2 μον.)
Να εξετάσετε αν συγκλίνει απόλυτα και αν συγκλίνει καθεμία απο τις παρακάτω σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{7k^2+4k+2}{8k^2+2k+1}\right)^k \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\cos(k\pi)\frac{1}{5k+3} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{e^k}{2^k+3^k}$$

Θέμα 3. (1 μον.)
Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sin(3x)$. Να βρείτε το πολυώνυμο Taylor της f τάξ
3 γύρω από το σημείο $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Θέμα 4. (1,5 μον.)
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{-2x-16}{x^2+x-6}dx$$

φέρνοντας το αποτέλεσμα στη μορφή $\log(A)$ για κατάλληλο A.

Θέμα 5. (3 μον.)
Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{x^2}dx \qquad \int_0^{\pi} e^x\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx \qquad \int_{[illegible]}^{[illegible]}\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$$

(Υπόδειξη: Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος μπορείτε να κάνετε την αντ
$x = \sin^2 y \Leftrightarrow y = \cdots$.)

Καλή Επιτυχία!